Térgeometria
Megoldások

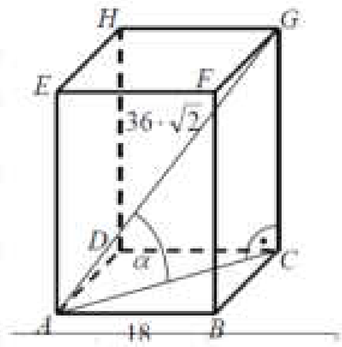
1) Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36 \cdot \sqrt{2}$ egység.

a) Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával? (4 pont)

b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (3 pont)

c) Az alapél és a testátló hosszát – ebben a sorrendben - tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak a második tagja! (4 pont)

Megoldás:



a) Az ACG háromszögben a $GAC\sphericalangle(=\alpha)$ szöget keressük (1 pont)

Az ABC derékszögű háromszögben $AC = 18 \cdot \sqrt{2}$ (1 pont)

így $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AG} = \dfrac{1}{2}, (0° < \alpha < 90°)$ (1 pont)

ahonnan $\boldsymbol{\alpha = 60°}$ (1 pont)

b) A négyzetes hasáb alapéle $a = 18$, magassága $m = CG = 18 \cdot \sqrt{6}$ (1 pont)

felszíne: $A = 2a^2 + 4a \cdot m = 2 \cdot 18^2 + 4 \cdot 18^2 \cdot \sqrt{6} \approx 3822,5$ (1 pont)

A hasáb felszíne **3822,5 területegység** (1 pont)

c) *Lásd: Sorozatok 27. feladat*

Összesen: 11 pont

2) Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

a) A kész talapzatnak
- hány éle,
- hány csúcsa,
- hány lapja van? (3 pont)

b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne? (6 pont)

c) Az ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb; a hét zöld jade tárgy mindegyik 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél. A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől? (7 pont)

Megoldás:

a) A lecsiszolt testnek **24** csúcsa van, mert a 8 kockacsúcs helyett minden csúcsnál 3-3 új csúcs keletkezik a negyedelő pontoknál (1 pont)
A lecsiszolt testnek 36 éle van, mert a 12 kocka élén maradnak élek, és a lemetszett háromszögek oldalai is élek: $8\cdot3=24$ és $12+24=\mathbf{36}$ (1 pont)
A lapok száma 14, mert kockalapokból marad egy-egy nyolcszög és a lemetszett háromszögek száma 8, $6+8=\mathbf{14}$ (1 pont)

b) A talapzat felszínét kiszámíthatjuk, ha a 6 db nyolcszög területéhez hozzáadjuk a 8 db szabályos háromszög területét. (1 pont)
A nyolcszög területe: a 12 dm oldalú négyzet területéből kivonjuk a 4 db egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, vagyis 2 db 3 dm oldalú négyzet területét: $T_{\text{nyolcszög}}=12^2-2\cdot3^2=126\ \text{dm}^2$ (2 pont)

A szabályos háromszög oldala $3\cdot\sqrt{2}$, ezért $T_{\text{háromszög}}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9\cdot\sqrt{3}}{2}\ \text{dm}^2$ (2 pont)

$A=6\cdot T_{\text{nyolcszög}}+8\cdot T_{\text{háromszög}}=756+36\cdot\sqrt{3}\approx\mathbf{818{,}35\ dm^2}$ (1 pont)

c) *Lásd: Szöveges feladatok 33. feladat*

Összesen: 16 pont

3) Az 1. ábra szerinti padlástér egy 6x6 méteres négyzetes alapú gúla, ahol a tető csúcsa a négyzet középpontja felett 5 méter magasan van

a) Milyen szöget zárnak be a tetősíkok a vízszintessel (padlássíkkal)? (4 pont)

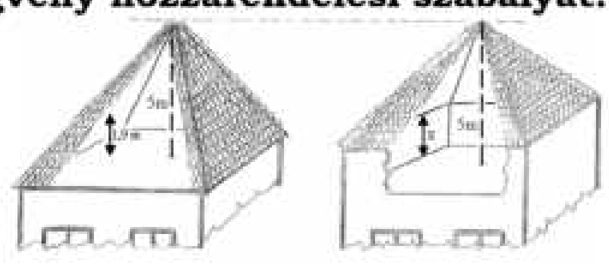
Hasznos alapterületnek számít a tetőtérben a terület, amely fölött a (bel)magasság legalább 1,9 méter.

b) Mennyi lenne a tetőtér beépítésekor a hasznos terület? (6 pont)

A tető cseréjekor a hasznos alapterület növelésének érdekében a ház oldalfalait egy ún. koszorúval kívánják magasítani. A ház teljes magassága- építészeti előírások miatt- nem növelhető, ezért a falak magasítása csak úgy lehetséges, ha a tető síkjának meredekségét csökkentik (2. ábra).

Jelölje *x* a koszorú magasságát és *T* a hasznos alapterületet.

c) Írja fel a *T*(*x*) függvény hozzárendelési szabályát! (6 pont)

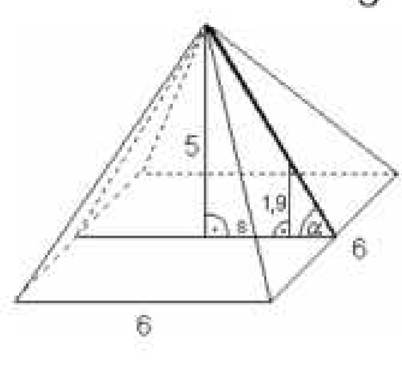


Megoldás:

a) A padlássíkra és a tetősíkra egyaránt merőleges síkmetszetből lehet a keresett szöget meghatározni. (2 pont)

A keresztmetszeti ábrán a keresett szöget α-val jelölve, felírható, hogy $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{5}{3}$

ahonnan $\alpha\approx\mathbf{59^\circ}$ (2 pont)



b) Keressük az ábrán s-sel jelölt szakasz hosszát. (2 pont)

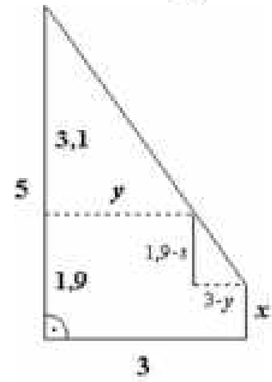
Hasonlóság alapján: $\dfrac{1{,}9}{3-s}=\dfrac{5}{3}$ (2 pont)

Ebből $s=1{,}86$ (1 pont)

A hasznos alapterület $4s^2\approx\mathbf{13{,}84}\ \text{m}^2$ (1 pont)

c) Az ábra jelöléseit használva használjuk, ahol $0 \le x \le 1,9$. Az ábra alapján $T = 4y^2$-et (ami a hasznos alapterület) kell kifejeznünk x segítségével. (1 pont)

A két kisebb háromszög megfelelő szögei egyenlők, tehát hasonlóak.



Így $\frac{3,1}{y} = \frac{1,9-x}{3-y}$ (1 pont)

Innen $y = \frac{9,3}{5-x}$ (1 pont)

Tehát a keresett összefüggés: $4y^2 = \left(\frac{18,6}{5-x}\right)^2$ (1 pont)

Ha $x \ge 1,9$, akkor 36 m² a hasznos alapterület. (1 pont)

Összefoglalva: $T(x) = \begin{cases} \left(\frac{\mathbf{18,6}}{\mathbf{5-x}}\right)^2, & \text{ha } \mathbf{0 \le x \le 1,9} \\ \mathbf{36}, & \text{ha } \mathbf{1,9 \le x \le 5} \end{cases}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük relatív hibának.) (3 pont)

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatát – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott - közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke! (7 pont)

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának az arányát, és legyen $x > 1$. Bizonyítandó, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibájának százalékban mérve a következő függvény adja meg:

$$f :]1;+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}.$$

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke! (6 pont)

Megoldás:

a) A közelítő henger alapkörének sugara: $\frac{1}{2} \cdot \frac{12+8}{2} = 5$ cm, térfogata $25 \cdot \pi \cdot 200 = 5000\pi \approx 15708$ cm³. (1 pont)

A csonkakúp elméletileg pontos térfogata:

$\frac{200\pi}{3}\left(6^2 + 6 \cdot 4 + 4^2\right) = \frac{15200\pi}{3} \approx 15917$ cm³. (1 pont)

A közelítő érték $\frac{200\pi}{3} \approx 209$ cm³-rel kisebb, tehát a pontos értéktől $\frac{200}{152} \approx$ **1,3 %-kal** tér el. (1 pont)

b) Legyen a csonkakúp alapköreinek sugara R és r, magassága m.

A csonkakúp elméleti térfogata: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$ (1 pont)

A csonkakúp gyakorlati térfogata: $\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi$ (1 pont)

A két térfogat különbségéről állítjuk: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)-\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi \geq 0$ (1 pont)

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $\frac{12}{m\pi}$-vel, bontsuk fel a zárójeleket és az összevonások után: $R^2-2Rr+r^2 \geq 0$ (2 pont)

Vagyis $(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r})^2 \geq \mathbf{0}$ adódik, ami minden *R* és *r* esetén igaz. (1 pont)

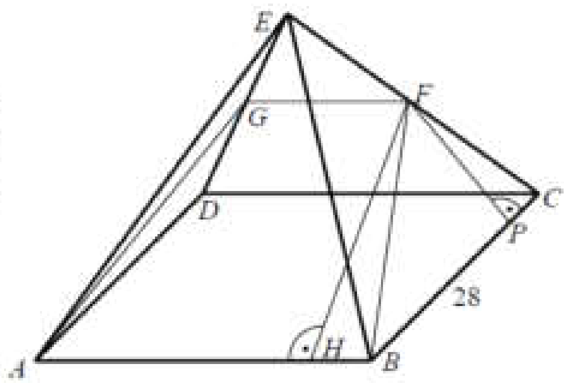
A következtetés minden lépése megfordítható, ezért az állítás igaz (1 pont)

c) *Lásd: Bizonyítások 8. feladat*

Összesen: 16 pont

5) Az *ABCDE* szabályos négyoldalú gúla alaplapja az *ABCD* négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen *F* a *CE* oldalélnek, *G* pedig a *DE* oldalélnek a felezőpontja. Az *ABFG* négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle? (16 pont)

Megoldás:



A GF középvonal a DCE háromszögben, így $GF=14$ egység (1 pont)

Az $ABFG$ négyszög szimmetrikus trapéz, (1 pont)

mivel $AB \| CD \| FG$ és $AG=BF$. (1 pont)

Legyen HF a trapéz alapokhoz tartozó magassága. A trapéz területképlete alapján

$\frac{28+14}{2} \cdot HF=504$ (1 pont)

tehát $HF=24$ egység (1 pont)

A szimmetrikus trapéz tulajdonsága miatt $HB=\frac{28-14}{2}=7$ (1 pont)

a HBF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel alapján $BF^2=24^2+7^2$ (1 pont)

ahonnan $BF=25$ (1 pont)

Az F pontból a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja legyen P. Ez a pont a BC oldal C-hez legközelebbi negyedelő pontja (2 pont)

A negyedelő pont indoklása: például legyen Q a BC él felezőpontja. Az FP szakasz az EQC háromszög középvonala (1 pont)

$BP=\frac{3}{4}BC=21$ és $PC=\frac{1}{4}BC=7$ (1 pont)

A BPF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételt alkalmazva: $PF^2=25^2-21^2=184$ (1 pont)

Az FPC derékszögű háromszögben is Pitagorasz-tételt alkalmazva: $FC^2=184+7^2$ (1 pont)

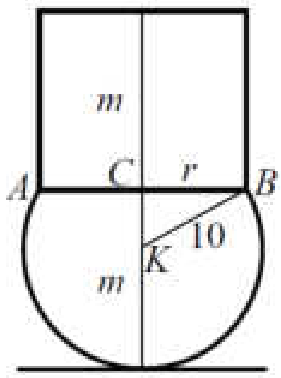
Így $FC=\sqrt{233} \approx 15,26$ (1 pont)

A gúla oldaléle $EC=2 \cdot FC=2 \cdot \sqrt{233} \approx \mathbf{30,53}$ **egység**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú $(m > 10)$ gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszelet határoló kör sugarával.
Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő méretű üreges fatalpra fogják állítani.)
Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m, a határoló kör sugara pedig r, akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot \left(3r^2 + m^2\right)$ (16 pont)

Megoldás:



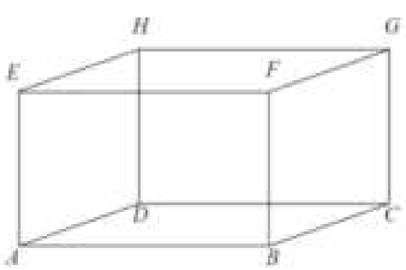
Helyes ábra (2 pont)
A KBC derékszögű háromszög befogóinak hossza $m-10$ és r, átfogója 10 cm (2 pont)
Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a KBC háromszögre: $(m-10)^2 + r^2 = 100$ (2 pont)
Ebből $r^2 = 20m - m^2$ (1 pont)
A váza térfogata:
$V(m) = \frac{\pi}{6} m \cdot \left[3\left(20m - m^2\right) + m^2\right] + \pi\left(20m - m^2\right)m$ (2 pont)
azaz $V(m) = \pi\left(-\frac{4}{3}m^3 + 30m^2\right) = \pi\frac{2\pi}{3}\left(45m^2 - 2m^3\right)$ (1 pont)
ahol $10 < m < 20$ (1 pont)
A V függvény differenciálható a $]10;20[$ nyílt intervallumon, deriváltja pedig: $V'(m) = \pi\left(-4m^2 + 60m\right) = 4\pi(15 - m)m$
A $]10;20[$ nyílt intervallumon $V'(m) = 0$ pontosan akkor, ha $m = 15$ (1 pont)

	$10 < m < 15$	$m = 15$	$15 < m < 20$
$V'(m)$	pozitív	$= 0$	negatív
V	szigorúan növő	helyi maximum	szigorúan csökkenő

(3 pont)
Az $\mathbf{m = 15}$ a V függvény abszolút maximum helye is, így ekkor lesz a váza térfogata a lehető legnagyobb $(V_{max} = 2250\pi)$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Az $ABCDEFGH$ téglatest A csúcsból induló élei: $AB = 12$, $AD = 6$, $AE = 8$. Jelölje HG felezőpontját P.



a) Számítsa ki az $ABCDP$ gúla felszínét! (10 pont)
b) Mekkora szöget zár be az $ABCDP$ gúla ABP lapjának síkja az $ABCD$ lap síkjával? (3 pont)

Megoldás:

a) Az alaplap területe: $T_{ABCD} = 12 \cdot 6 = 72\ \text{cm}^2$ (1 pont)

Az AB él felezőpontja legyen M, a CD él felezőpontja pedig N. Az APB háromszög egyenlő szárú, a PM merőleges az AB szakaszra. Az MNP háromszög az N csúcsban derékszögű. (1 pont)

$PM = 10\ \text{cm}$ (a befogók 6 és 8) (1 pont)

Az ABP háromszög területe: $T_{ABP} = \frac{AB \cdot PM}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60\ \text{cm}^2$ (1 pont)

A DCP háromszög területe: $T_{DCP} = \frac{DC \cdot PN}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48\ \text{cm}^2$ (1 pont)

$DP = PC = 10\ \text{cm}$ (1 pont)

A PBC és a PAD oldallapok egybevágó háromszögek (1 pont)

és a két háromszög egybevágó a PBM háromszöggel (1 pont)

$T_{PBC} = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30\ \text{cm}^2$ (1 pont)

A gúla felszíne: $(72 + 60 + 48 + 2 \cdot 30) = \mathbf{240\ cm^2}$ (1 pont)

b) Az MN szakasz és a PM szakasz is merőleges az AB élre, ezért a kérdezett szög a $PMN\sphericalangle$ (1 pont)

A PMN háromszög N-nél derékszögű (1 pont)

ezért $\text{tg}PMN\sphericalangle = \frac{PN}{MN} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, ahonnan $PMN\sphericalangle \approx \mathbf{53{,}1^\circ}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestjük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockára vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros.

Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata? (16 pont)

Megoldás:

Legyen a négyzetes oszlop alapéleinek hossza a (cm) és a magasság hossza b (cm). (a, b 2-nél nagyobb egészek). (1 pont)

Azoknak az egységkockáknak lesz pontosan két lapja piros, melyek az élek mentén, de nem a csúcsokban helyezkednek el (1 pont)

A két db négyzetlap 8 élén $8 \cdot (a-2)$ (1 pont)

a 4 oldalélén $4 \cdot (b-2)$ ilyen festett kocka van (1 pont)

$8 \cdot (a-2) + 4 \cdot (b-2) = 28$ (1 pont)

Innen $2a + b = 13$ (1 pont)

Az élhosszak megfelelő értékei (6 pont)

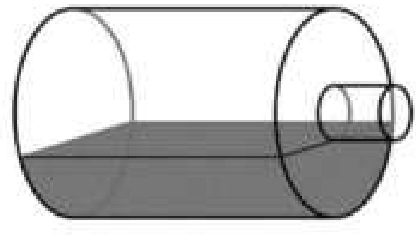
a	5	4	3
b	3	5	7

A három lehetséges négyzetes oszlop (1 pont)

térfogata rendre 75 cm³, 80 cm³ és 63 cm³ (3 pont)

Összesen: 16 pont

9) **Egy pillepalack alakja olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm. A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson keresztül.**



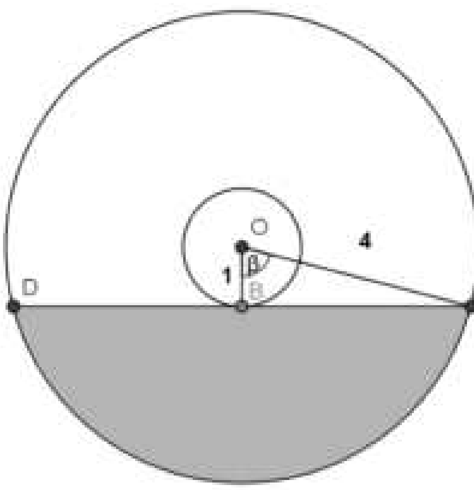
a) Hány deciliter folyadék van a palackban? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) **(9 pont)**

A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata 2*p* százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további *p* százalékával tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az azt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze.

b) Határozza meg *p* értékét! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A fedőkör tengelyre merőleges síkmetszete, jó ábra. (2 pont)



$\cos\beta = \frac{1}{4}$, amiből $\beta \approx 75,52°$ (1 pont)

(Így a kérdéses terület az O középpontú 2β középponti szögű körcikk és az ODC háromszög különbségeként adódik.

$T_{\text{körcikk}} = \frac{2\beta}{260°} \cdot 4^2\pi \approx 21,09\,(\text{cm}^2)$ (1 pont)

$T_{ODC_\triangle} = \frac{4^2 \sin 2\beta}{2} \approx 3,87\,(\text{cm}^2)$ (1 pont)

$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{ODC_\triangle} \approx 17,22\ (\text{cm}^2)$ (1 pont)

Amiből a folyadék térfogata:

$V_{\text{folyadék}} = T_{\text{körszelet}} \cdot m_{\text{palack}} = 17,22 \cdot 30 = 516,6\,(\text{cm}^2)$ (1 pont)

Azaz 5,2 dl folyadék van a palackban. (2 pont)

b) A feltételek szerint $\left(1 - \frac{2p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 0,195$ (ahol $p < 50$) (2 pont)

Rendezve: $p^2 - 150p + 4025 = 0$ (2 pont)

melynek gyökei $p_1 = 35,\ p_2 = 115$ (1 pont)

Utóbbi nem megoldása a feladatnak ($p < 50$) (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{p = 35}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

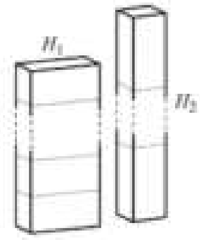
10) **Egy forgáskúp nyílásszöge 90°, magassága 6 cm.**

a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm³-ben) és a felszínét (cm²-ben)! **(4 pont)**

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm³-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbének középpontján? **(9 pont)**

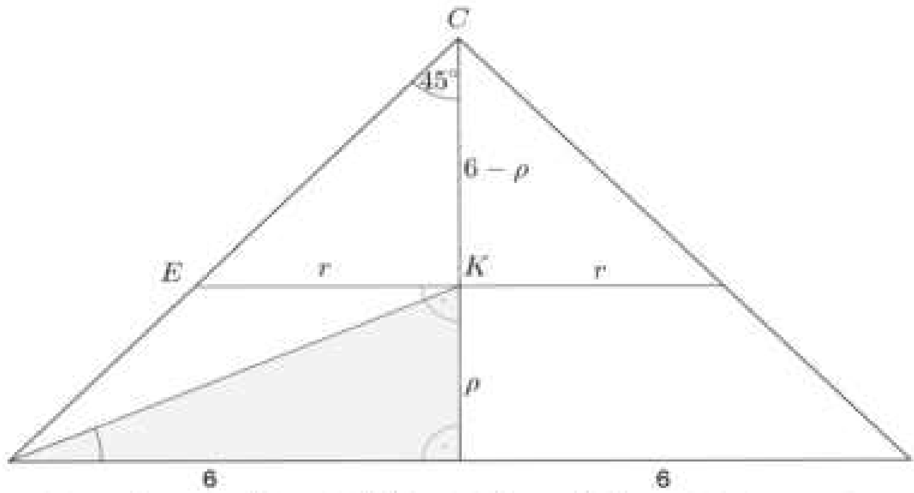
Válaszát egészre kerekítve adja meg!

Megoldás:



a) A kúp alapkörének sugara 6cm,
alkotójának hossza $6\sqrt{2} \approx 8,49$ cm

térfogata $V = \dfrac{T \cdot m}{3} = \dfrac{6^2 \cdot \pi \cdot 6}{3} = 72\pi \approx$ **226 cm³**



felszíne $A = r\pi(r+a) = 6\pi\left(6+6\sqrt{2}\right) = 36\left(1+\sqrt{2}\right)\pi \approx$ **273 cm²** (1 pont)

b) Jó ábra, tartalmazza a gömb sugarát (p), a 45°-os szöget és a síkmetszet sugarát (r) (2 pont)

$p = 6 \cdot \text{tg}22,5°$ (1 pont)

amiből $p \approx 2,49\,\text{cm}$ (1 pont)

A KCE egyenlőszárú derékszögű háromszögből $r = 6 - p$ (1 pont)

azaz $r \approx 3,51\,\text{cm}$ (1 pont)

A csonkakúp magassága (egyenlő a gömb sugarával) $m \approx 2,49\,\text{cm}$ (1 pont)

A csonkakúp térfogata $V = \dfrac{m\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) \approx \dfrac{2,49\pi}{3}\left(6^2 + 6 \cdot 3,51 + 3,51^2\right) \approx$

(1 pont)

$\approx$ **181 cm³** (1 pont)

Összesen 13 pont

11) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. AZ építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágóak, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.

a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\dfrac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\dfrac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton csökkenő és korlátos! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a jelöli a négyzetes oszlop alapélének hosszát, és k darabból készítjük a hasábokat, akkor H_1 felszíne:

$A_{H_1} = 2 \cdot 2a + 2 \cdot k \cdot a^2 + 2 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2(3k+2)\right)$ (2 pont)

H_2 felszíne: $A_{H_2} = 2a^2 + 4 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2(4k+1)\right)$ (2 pont)

Az $\dfrac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0{,}8$ feltételből $3k + 2 = 0{,}8 \cdot (4k+1)$ (2 pont)

Az egyenlet megoldása $k = 6$ (1 pont)

tehát **6-6** négyzetes oszlopot használtunk fel az építéshez (1 pont)

b) *Lásd: Bizonyítások 9. feladat, Sorozatok 9. feladat*

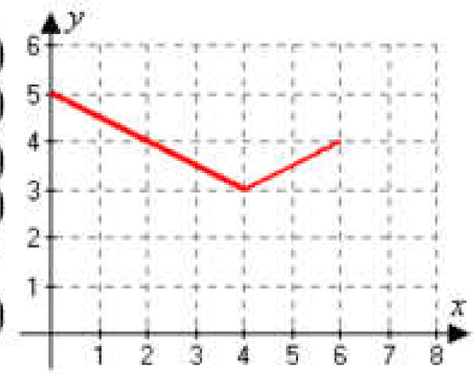
Összesen 16 pont

12) a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto \dfrac{1}{2}|x-4|+3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! (4 pont)

b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét! (2 pont)

c) Forgassuk meg a $[0;4]$ intervallumra leszűkített függvény grafikonját az x tengely körül! Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét! (8 pont)

Megoldás:



a) Ábra.... (4 pont)

b) Az értékkészlet $[\mathbf{3;5}]$ (2 pont)

c) A keletkezett forgástest egy csonkakúp (2 pont)

Az alapkörök sugara $R = 5; r = 3$ (2 pont)

Az alkotó hossza Pitagorasz-tétellel:

$a = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (2 pont)

Így a felszín:

$A = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)a\pi = 25\pi + 9\pi + 16\sqrt{5}\pi \approx 69{,}78\pi \approx \mathbf{219{,}2}$ (2 pont)

Összesen: 14 pont

13) Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldarabolunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (16 pont)

Megoldás:

Jelölje a az eredeti kocka élhosszát, b pedig a 99., nem egységkocka élhosszát centiméterben mérve. A feltételek alapján a és b pozitív egészek, és $98 = a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ (3 pont)

Mivel $98 = 2 \cdot 7^2$ és $a - b < a^2 + ab + b^2$, ezért 3 eset lehetséges (2 pont)

I. eset: $a - b = 1$ és $a^2 + ab + b^2 = 98$

Ekkor $a = b + 1$ helyettesítés után a második egyenletből kapjuk, hogy $3b^2 + 3b = 97$, ami nem lehet, hiszen 3 nem osztója 97-nek (3 pont)

II. eset: $a - b = 2$ és $a^2 + ab + b^2 = 49$

Ekkor $b^2 + 2b = 15$, ahonnan a feltételeknek megfelelő megoldás: $b = 3$ és $a = 5$ (3 pont)

III. eset: $a-b=7$ és $a^2+ab+b^2=14$

Ekkor $3b^2+21b=-35$, ami nem lehetséges, ugyanis b pozitív egész (3 pont)

Azt kaptuk, hogy az eredeti kocka éle 5 cm, így térfogata **125 cm³** (2 pont)

Összesen: 16 pont

14) Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb *x* távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét *x* függvényében! (6 pont)

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú *x* magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora *x* estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Síkgeometria 14. feladat*

b) A hasáb alaplapja $A_1B_1C_1$ háromszög, magassága x.

$$V(x)=T\cdot x=\frac{3\sqrt{3}(1-2x)^2}{4}\cdot x=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(4x^3-4x^2+x\right)$$ (1 pont)

ahol $0<x<\frac{1}{2}$ (1 pont)

A V függvény differenciálható az értelmezési tartományán és

$$V'(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(12x^2-8x+1\right)$$ (2 pont)

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(12x^2-8x+1\right)=0$$ (1 pont)

Megoldásai: $\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{6}$ (1 pont)

	$0<x<\frac{1}{6}$	$x=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$
$V'(x)$	pozitív	$=0$	negatív
$V(x)$	növő	maximum	csökkenő

(3 pont)

A hasáb térfogata maximális, ha az x távolságot $\mathbf{\frac{1}{6}}$ **dm** hosszúnak választjuk.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

15) Egy üzemben 4000 cm³-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

a) Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak! (3 pont)

b) **Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát! (9 pont)**

c) **Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes? (4 pont)**

Megoldás:

a) Az edény alapéle legyen x cm hosszú

$4000 = x^2 \cdot 6,4$ (1 pont)

$x = 25$ (1 pont)

A zománccal bevonható felület területe tehát

$625 + 4 \cdot 25 \cdot 6,4 = \mathbf{1265\,cm^2}$ (1 pont)

b) Ha az edény magassága m cm, akkor $4000 = x^2 \cdot m$ és a zománccal bevonandó felület területe cm²-ben $T = x^2 + 4xm$ (1 pont)

Az m-et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T-be

$T = x^2 + \dfrac{16000}{x}$ (1 pont)

Tekintsük a $T:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; T(x) = x^2 + \dfrac{16000}{x}$ függvényt (1 pont)

T-nek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0 (1 pont)

$T'(x) = 2x - \dfrac{16000}{x^2}$ (1 pont)

$T'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$ (1 pont)

Mivel $T''(x) = 2 + \dfrac{32000}{x^3}$ pozitív az $x = 20$ helyen (1 pont)

ezért a T függvénynek az $x = 20$ helyen abszolút minimuma van (1 pont)

A gyártott edények alapéle 20 cm (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 23. feladat*

Összesen: 16 pont

16) Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm³. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,2 cm² Ft, míg oldalának anyagköltsége 0,1 cm² Ft.

a) **Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve! (13 pont)**

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) **Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (3 pont)**

Megoldás:

a) Ha r a doboz alapkörének sugara m pedig a doboz magassága cm-ben mérve, akkor $V = r^2\pi m$ ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{1000}{r^2\pi}$ (1 pont)

Az alap- és a fedőlap együttes anyagköltsége r függvényében $0,2 \cdot 2r^2\pi$ (1 pont)

A palást anyagköltsége $0,1 \cdot 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = \frac{200}{r}$ (2 pont)

A teljes anyagköltség $r > 0$ esetében

$f(r) = 0,4r^2\pi + \frac{200}{r}$ (1 pont)

Az f függvénynek a pozitív számok halmazán ott lehet minimuma, ahol deriváltja 0. (1 pont)

$f'(r) = 0,8r\pi - \frac{200}{r^2}$ (2 pont)

$f'(r) = 0$ ha $r\left(= \sqrt[3]{\frac{200}{0,8\pi}}\right) \approx 4,3$ (1 pont)

$f''(r) = 0,8\pi + \frac{400}{r^3} > 0$, ezért itt valóban minimális f értéke (1 pont)

Minimális anyagköltséghez tartozó magasság

$m = \frac{1000}{r^2\pi} \approx 17,2\text{ cm}$ (1 pont)

Tehát a minimális anyagköltség forintra kerekítve **70 Ft** (2 pont)

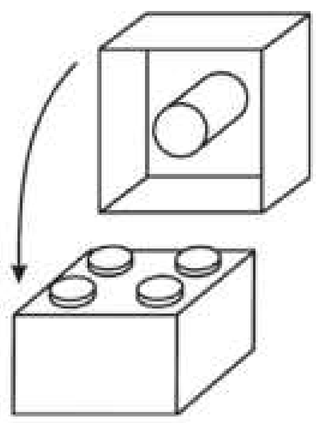
b) Az adatok átlaga 0,7 (1 pont)

A minta átlagtól mért átlagos abszolút eltérése

$\frac{6 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,3 + 1,3 + 2,3}{10} = \mathbf{0,84}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

17) Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

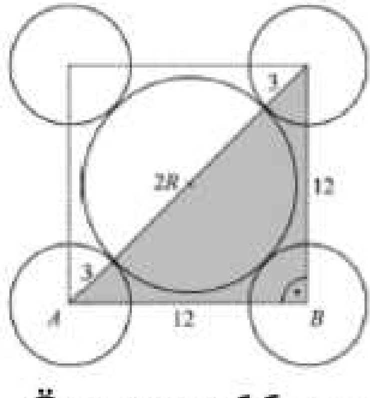
A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

b) Hányféle különböző szín összeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? (4 pont)

A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra.
Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: *0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.*

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (7 pont)

Megoldás:



a) Jó ábra rajzolása (1 pont)
A kis kör kp-ja egy 12 mm oldalú négyzetet alkot (1 pont)
Ennek az átlója $12\sqrt{2}$ (1 pont)
Mivel ez éppen $2R+6$ (1 pont)
$d=2R=\left(12\sqrt{2}-6\right)\approx$ **10,97 mm** (1 pont)

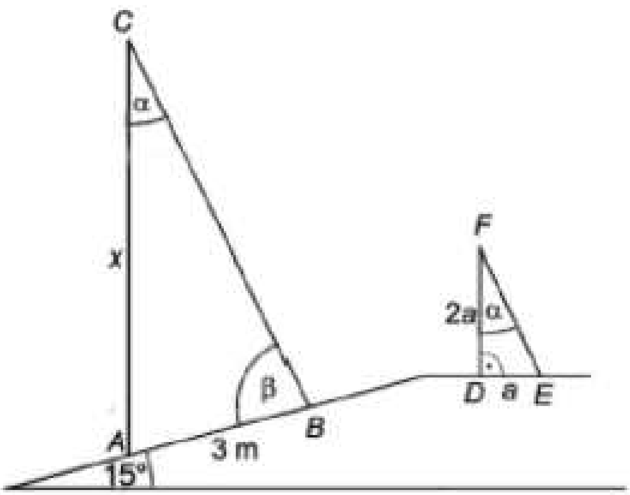
b) *Lásd: Valószínűségszámítás 25. feladat*

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 25. feladat*

Összesen: 16 pont

18) Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (12 pont)

Megoldás:



A szövegnek megfelelő, az adatokat helyesen feltüntető ábra. (2 pont)
Az *ACB* és *DFE* szögek egyenlők, mivel mindkettő a napsugarak és a függőleges által bezárt szög. (1 pont)
A *DEF* derékszögű háromszögben:
$\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ (2 pont)
$\alpha\approx 26{,}57°$ (1 pont)
BAC szög $(90°-15°=)75°$ (1 pont)
Így $\beta\approx 78{,}43°$. (1 pont)

(Szinusztétel az *ABC* háromszögben:) $\frac{\sin 78{,}43°}{\sin 26{,}57°}=\frac{x}{3}$ (2 pont)

$x\approx 6{,}57$ (1 pont)
A fa tehát körülbelül **6,6 méter** magas. (1 pont)

Összesen: 12 pont

19) Aranyékszerek készítésekor az aranyat mindig ötvözik valamilyen másik fémmel. A karát az aranyötvözet finomságát jelöli. Egy aranyötvözet 1 karátos, ha az ötvözet teljes tömegének $\frac{1}{24}$ része arany, a *k* karátos aranyötvözet tömegének $\frac{k}{24}$ része arany.

Kata örökölt a nagymamájától egy 17 grammos, 18 karátos aranyláncot. Ebből két darab 14 karátos karikagyűrűt szeretne csináltatni.

a) Legfeljebb hány gramm lehet a két gyűrű együttes tömege, ha aranytartalmuk összesen sem több mint az aranylánc aranytartalma? (4 pont)

b) Kata végül két olyan gyűrűt készíttetett, amelyek együttes tömege 16 gramm. (A megmaradó 14 karátos aranyötvözetet törtaranyként visszakapta.) Az elkészült két karikagyűrű tekinthető két lyukas hengernek, amelyek szélessége (a lyukas hengerek magassága) megegyezik. Az egyik gyűrű belső átmérője 17 mm, és mindenhol 1,5 mm vastag, a másik gyűrű belső átmérője 19,8 mm, vastagsága pedig mindenhol 1,6 mm.
Hány mm a gyűrűk szélessége, ha a készítésükhöz használt 14 karátos aranyötvözet sűrűsége $15\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$? (10 pont)

Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 12. feladat*

b) A két gyűrű térfogatának összege $V=\frac{m}{\rho}=\frac{16}{15}\approx 1{,}0667\ \text{cm}^3=1066{,}7\ \text{mm}^3$. (2 pont)

Egy gyűrű térfogata két henger térfogatának különbsége. (1 pont)

Az egyik gyűrű belső sugara 8,5 mm, külső sugara 10 mm, és ha x a keresett szélesség, akkor $V_1=10^2\cdot\pi\cdot x-8{,}5^2\cdot\pi\cdot x\approx 87{,}2x$ (mm³). (2 pont)

A másik gyűrű belső sugara 9,9 mm, külső sugara 11,5 mm, így $V_2=11{,}5^2\cdot\pi\cdot x-9{,}9^2\cdot\pi\cdot x\approx 107{,}6x$ (mm³) (2 pont)

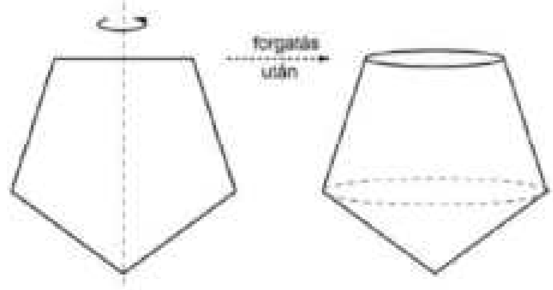
$V=V_1+V_2$, azaz $1066{,}7=87{,}2x+107{,}6x$. (1 pont)

Ebből $x\approx 5{,}48$ mm. (1 pont)

A gyűrűk szélessége **5,5 mm**. (1 pont)

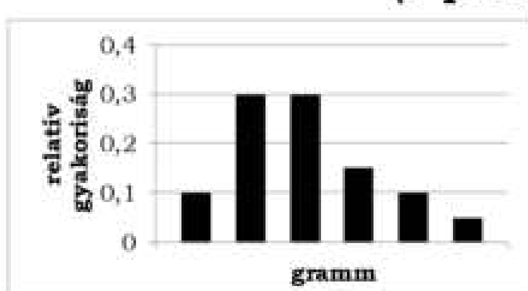
Összesen: 14 pont

20) Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőónt” gyárt, amelynek nehezéke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetria-tengelye körüli forgatásával származtatható (lásd az ábrán).



a) Hány cm³ a nehezék térfogata? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A minőség-ellenőrzés 120 darab terméket vizsgált meg. Feljegyezték az egyes darabok egész grammokra kerekített tömegét is. Hatféle tömeg fordult elő, ezek relatív gyakoriságát mutatja az oszlopdiagram.



b) Készítsen gyakorisági táblázatot a 120 adatról, és számítsa ki ezek átlagát és szórását! (5 pont)

Megoldás:

a) A nehezék térfogata egy forgáskúp és egy csonkakúp térfogatának összege. (1 pont)

A forgáskúp magassága az AFB derékszögű háromszögből:

$m = 2 \cdot \cos 54^{\circ}$ (2 pont)

A kúp alapkörének sugara:

$r = 2 \cdot \sin 54^{\circ}$ (1 pont)

A csonkakúp h magassága a CGD derékszögű háromszögből:

$h = 2 \cdot \sin 72^{\circ}$ (2 pont)

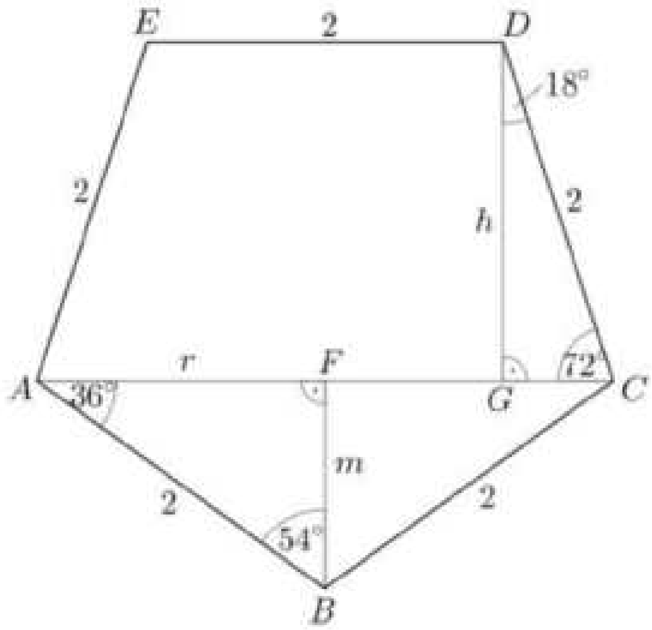
A forgáskúp térfogata:

$V_{\text{kúp}} \approx \dfrac{1{,}62^2 \cdot 1{,}18 \cdot \pi}{3}$ (1 pont)

A csonkakúp térfogata:

$V_{\text{csonkakúp}} \approx \dfrac{1{,}90 \cdot \pi}{3} \cdot \left(1{,}62^2 + 1{,}62 \cdot 1 + 1^2\right)$

(1 pont)



A nehezék térfogata a kettő összege:

$V_{\text{kúp}} + V_{\text{csonkakúp}} \approx 3{,}24 + 10{,}39 \approx \mathbf{13{,}6}$ **(cm³)**. (1 pont)

b) *Lásd: Statisztika 9. feladat*

Összesen: 14 pont

21) Egy üzemben olyan digitális műszert gyártanak, amely kétféle adat mérésére alkalmas: távolságot és szöget lehet vele meghatározni. A gyártósor meghibásodott, de ezt hosszabb ideig nem vették észre. Ezalatt sok mérőeszközt gyártottak, ám ezeknek csak a 93%-a adja meg hibátlanul a szöget, a 95%-a méri hibátlanul a távolságot, sőt a gyártott mérőeszközök 2%-a mindkét adatot hibásan határozza meg.

a) Az egyik minőségellenőr 20 darab műszert vizsgál meg visszatevéses mintavétellel a meghibásodási időszak alatt készült termékek közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 darab hibásat talál közöttük? (Egy műszert hibásnak tekintünk, ha akár a szöget, akár a távolságot hibásan méri.) **(7 pont)**

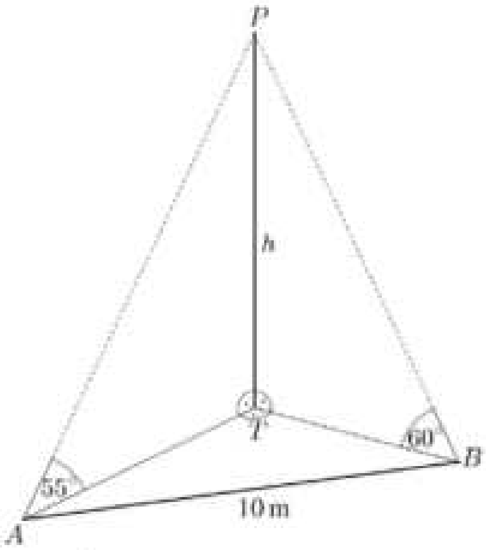
Vízszintes, sík terepen futó patak túlpartján álló fa magasságát kell meghatároznunk. A síkra merőlegesen álló fát megközelíteni nem tudjuk, de van egy kisméretű, digitális műszerünk, amellyel szöget és távolságot is pontosan tudunk mérni. A patakparton kitűzzük az A és B pontokat, amelyek 10 méterre vannak egymástól. Az A pontból 55°-os, a B-ből 60°-os emelkedési szög alatt látszik a fa teteje. Szögméréssel még megállapítjuk, hogy $ATB\sphericalangle = 90^{\circ}$, ahol T a fa „talppontja”.

b) Milyen magas a fa? **(9 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Valószínűségszámítás 29. feladat*

b) Jó ábra felrajzolása (2 pont)



Az ATP háromszögből: $AT = \dfrac{h}{\text{tg}55^\circ} \approx 0,700h$ (1 pont)

A BTP háromszögből: $BT = \dfrac{h}{\text{tg}60^\circ} \approx 0,577h$ (1 pont)

Az ATB derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel adódik: (1 pont)

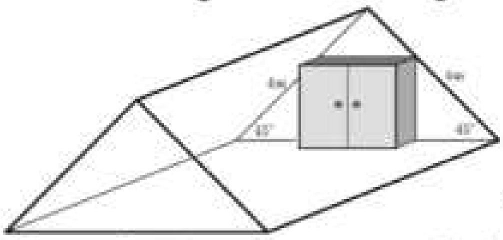
$\dfrac{h^2}{\text{tg}^2 55^\circ} + \dfrac{h^2}{\text{tg}^2 60^\circ} = 100$, (1 pont)

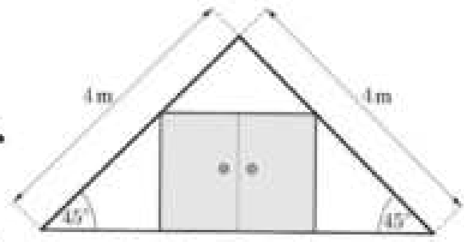
Innen $\boldsymbol{h \approx 11}$ **m**. (2 pont)

A fa magassága tehát körülbelül 11 méter. (1 pont)

Összesen: 16 pont

22) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású", a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

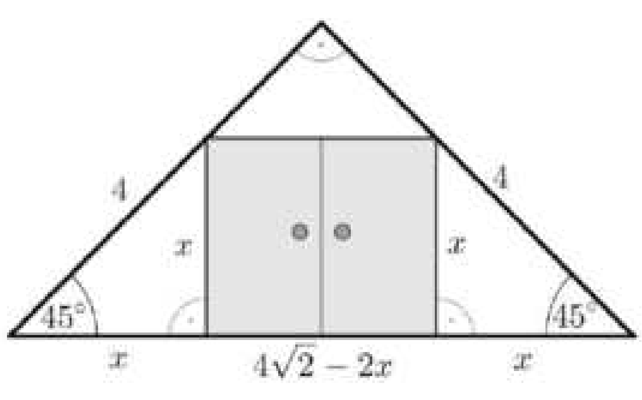
a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a szekrény magassága x méter, akkor szélessége az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek miatt $4\sqrt{2} - 2x$. (2 pont)



A térfogata pedig: $V = 0,6x\left(4\sqrt{2} - 2x\right)$, amennyiben $0 < x < 2\sqrt{2}$. (1 pont)

Az $x \mapsto 0,6x\left(4\sqrt{2} - 2x\right)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$. (1 pont)

Így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél, az $x=\sqrt{2}$ helyen lesz. (2 pont)

Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért a legnagyobb térfogatú szekrény magassága körülbelül **1,41 méter**, szélessége pedig körülbelül **2,83 méter** lesz. (2 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 30. feladat, Kombinatorika 30. feladat*

Összesen: 16 pont

23) Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m^2-nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni? (6 pont)

b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben?
Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) Az egy fordulattal lefestett falfelület nagysága a (festő)henger palástjának területével egyenlő. (1 pont)

$T_{\text{palást}}=2\cdot 2\cdot 20\cdot \pi=80\pi\left(\approx 251{,}3\ \text{cm}^3\right)$ (1 pont)

$40\ \text{m}^2=400000\ \text{cm}^2$, (1 pont)

tehát a teljes falfelület befestéséhez

kb. $\dfrac{400000}{251{,}3}\approx 1592$ fordulatra van szükség a festőhengerrel. (1 pont)

Ennyi fordulattal kb. $1592\cdot 3=4776\ \text{ml}$ festéket viszünk fel a falra. (1 pont)

4 liter festék megvásárlása tehát nem elegendő. (1 pont)

b) $4\ \text{liter}=\left(4\ \text{dm}^3=\right)4000\ \text{cm}^3$ (1 pont)

$r=8\ \text{cm}$ (1 pont)

$4000\ \text{cm}^3=8^2\cdot\pi\cdot m$ (1 pont)

Ebből $m=\dfrac{4000}{64\pi}\approx 19{,}9(\text{cm})$. (1 pont)

A festék tehát kb. 20 cm magasan állna a vödörben. (1 pont)

Összesen: 11 pont

24)

a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé! (6 pont)

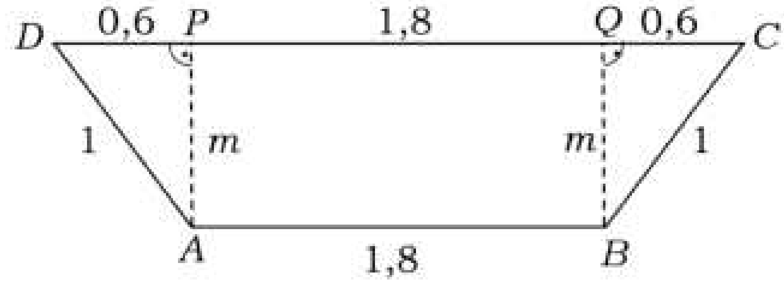
Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza *p*, a másiké pedig *q* $(p>0,\ q>0)$. (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+g^3\right)^2}$. (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a két test felszíne egyaránt A, akkor $V_{\text{kocka}}^2 = \dfrac{A^3}{6^3}$, (2 pont)



$V_{\text{gömb}}^2 = \dfrac{A^3}{36\pi}$ (2 pont)

Mivel $36\pi < 6^3$, ezért **a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka térfogatánál.** (2 pont)

b) Az összeolvasztással kapott kocka térfogata $p^3 + q^3$, ezért élének hossza $\sqrt[3]{p^3+q^3}$, (1 pont)

felszíne tehát $6 \cdot \left(\sqrt[3]{p^3+q^3}\right)^2$, ami valóban $6 \cdot \sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2}$ -nel **egyenlő.** (1 pont)

c) A bizonyítandó állítás: $6 \cdot \sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2} < 6 \cdot \left(p^2+q^2\right)$ (1 pont)

Mindkét oldalt 6-tal osztva és köbre emelve (az x^3 függvény szigorú monotonitása miatt): $\left(p^3+q^3\right)^2 < \left(p^2+q^2\right)^3$. (1 pont)

Elvégezve a hatványozásokat: $p^6 + 2p^3q^3 + q^6 < p^6 + 3p^4q^2 + 3p^2q^4 + q^6$. (2 pont)

Rendezve és a pozitív p^2q^2 szorzattal osztva: $0 < 3p^2 + 3q^2 - 2pq$. (1 pont)

$0 < 2p^2 + 2q^2 + \left(p-q\right)^2$, (1 pont)

ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon két pozitív és egy nemnegatív szám összege áll). (1 pont)

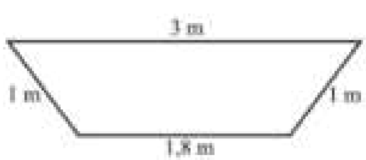
Mivel minden átalakítás ekvivalens volt, ezért a bizonyítandó állítás is **igaz.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

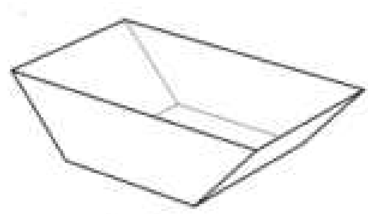
25) Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van! (5 pont)

A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak. A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m×2 m-es (tégla-lap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra



2. ábra

b) Számítsa ki a hasáb térfogatát! Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m³ térfogatú folyadék! (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Valószínűségszámítás 38. feladat*

b) (A hasáb alaplapja az *ABCD* húrtrapéz.)

Az ábra jelöléseit használva, az APD derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $m=\sqrt{1^2-0,6^2}=0,8$ (m). (1 pont)

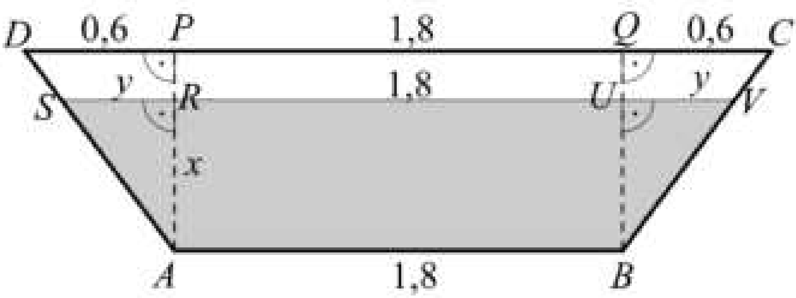
A hasáb alaplapjának (az *ABCD* trapéznak) a területe: $\left(\frac{1,8+3}{2}\cdot 0,8=\right)1,92$ (m^2), (1 pont)

tehát a hasáb (a konténer) térfogata: (=·292,1) 3,84 m^3. (1 pont)

A tisztító folyadék x méter magasságban áll a konténerben. A folyadék egy olyan szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasábot tölt meg, (1 pont)

amelynek a magassága 2 méter, az alaplapjának a területe pedig

$\left(\frac{2,7}{2}=\right)1,35$ (m^2). (1 pont)



Az (ábra szerinti) *APD* és *ARS* derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{SR}{AR}=\frac{DP}{AP}$,

(1 pont)

azaz $\frac{y}{x}=\frac{0,6}{0,8}=\frac{3}{4}$. (1 pont)

$SV=1,8+2y=1,8+1,5x$, ezért (mivel az *ABVS* trapéz területe 1,35 m^2)
$\frac{1,8+1,8+1,5x}{2}\cdot x=1,35$ (1 pont)

Ebből $1,5x^2+3,6x-2,7=0$, (1 pont)

amelynek a gyökei 0,6 és –3. (1 pont)

(A –3 nem felel meg, tehát) **a tisztító folyadék 0,6 méter magasságban áll a konténerben.** (1 pont)

Összesen16 pont

26) Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egy az *A* futószalagra kerül, a másik a *B* futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az *A* futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g, 46 g.

a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik! (5 pont)

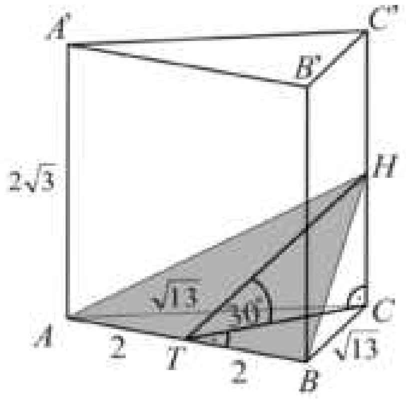
Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB=4$, $AC=BC=\sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az *AB* alapél egyenesére illeszkedő *S* sík $30°$-os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát! (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 11. feladat*

b) Helyes ábra. (1 pont)



A 30°-os szög helyes értelmezése (például a szög jelölése az ábrán). (1 pont)

Az ABC egyenlőszárú háromszög AB oldalához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel): $TC=3$. (1 pont)

Az S sík a CC' élt a H pontban metszi. A TCH derékszögű háromszögből: $\tan 30° = \frac{CH}{TC}$, (1 pont)

ahonnan $CH = (TC \cdot \tan 30° =) 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. (1 pont)

Az ABC lapot tartalmazó rész egy tetraéder, melynek ABC lapjához tartozó magassága CH. (1 pont)

$\left(T_{ABC} = 6, \text{ ezért}\right) V_{ABCH} = \frac{T_{ABC} \cdot CH}{3} = 2\sqrt{3} \left(\approx 3,46\right)$ (1 pont)

A másik rész térfogatát megkapjuk, ha az első rész térfogatát levonjuk az eredeti hasáb térfogatából. (1 pont)

$V_{ABCA'B'C'} = T_{ABC} \cdot CC' = 12\sqrt{3} \left(\approx 20,78\right)$ (1 pont)

$V_{ABHA'B'C'} = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \left(\approx 17,32\right)$ (1 pont)

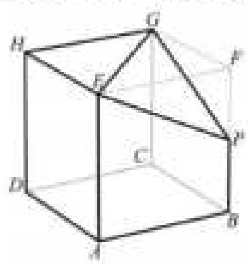
$\boldsymbol{\frac{V_{ABCH}}{V_{ABHA'B'C'}} = \frac{2\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{5}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) 6 cm oldalélű tömör *ABCDEFGH* kocka *BF* élén megjelöltük az él *P* felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az *E*, *G*, *P* pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint).

a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne? (8 pont)

b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka *EFGH* lapjának síkja? (4 pont)



Megoldás:

a) A nagyobbik testet három (6 cm oldalú) négyzet, két egybevágó derékszögű trapéz és két (nem egybevágó) egyenlő szárú háromszög határolja. (1 pont)

A három négyzet és az EGH egyenlő szárú derékszögű háromszög területe együtt $(3,5 \cdot 36 =)\, 126\, (\text{cm}^2)$. (1 pont)

A derékszögű trapézok alapjának hossza (cm-ben mérve) 6 és 3, magassága 6, területe $27\, (\text{cm}^2)$. (1 pont)

Az EGP egyenlő szárú háromszög EG alapjának hossza $6\sqrt{2} \left(\approx 8,5\right)$, (1 pont)

szárainak hossza (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \left(\approx 6,7\right)$, (1 pont)

az alapjához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \left(\approx 5,2\right)$. (1 pont)

Az EGP háromszög területe $\frac{6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}\,(\approx 22{,}0)$. (1 pont)

A nagyobbik test felszíne kb. $(126+2\cdot 27+22{,}0=)$ $\mathbf{202\ cm^2}$. (1 pont)

b) Ha az EG lapátló felezőpontját O-val jelöljük, akkor a keresett szög az $FOP\sphericalangle$ (mert FO és PO is merőleges a két sík EG metszésvonalára). (1 pont)

Az FOP háromszög derékszögű, $FP=3\,(\text{cm})$ és $FO=3\sqrt{2}\,(\text{cm})$. (1 pont)

$\operatorname{tg} FOP\sphericalangle = \frac{3}{3\sqrt{2}}\,(\approx 0{,}7071)$ (1 pont)

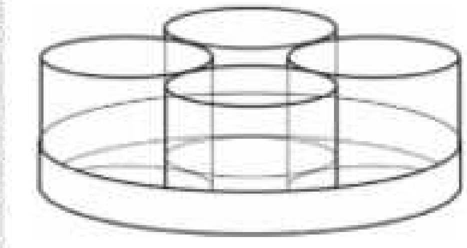
$FOP\sphericalangle \approx \mathbf{35{,}3°}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

28)

a) Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$. (4 pont)

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharakat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél! (5 pont)

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő? (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 19. feladat*

b) *Lásd: Síkgeometria 28. feladat*

c) Mivel a pohár fala 2,5 mm vastag, így a belső sugara nagyobb, mint $(4{,}1-0{,}25)=3{,}85\ \text{cm}$. (1 pont)

A pohár térfogata: $V_{pohár} > 3{,}85^2\cdot\pi\cdot 11 \approx 512\ \text{cm}^3$. (1 pont)

$1\ \text{dl} = 100\ \text{cm}^3$, (1 pont)

tehát **igaz**, hogy belefér 5 dl üdítő a pohárba. (1 pont)

Összesen: 13 pont

29) Egy fémlemezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el.

a) Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, felül nyitott hordó elkészítéséhez, ha gyártása során 12%-nyi hulladék keletkezik? (6 pont)

Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezhordókat.

b) Mekkora annak a 200 liter térfogatú, felül nyitott forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne? (10 pont)

Megoldás:

a) 200 liter = 200 dm^3 (1 pont)

A hordó alapterülete $\left(\frac{200}{8}=\right)$ 25 dm^2, (1 pont)

a sugara pedig $\left(\sqrt{\frac{25}{\pi}}\approx\right)$ 2,82 dm. (1 pont)

A palást területe $(2\pi\cdot 2{,}82\cdot 8\approx)\,142\ dm^2$, (1 pont)

a hordó körülbelül 167 dm^2 területű lemezből áll. (1 pont)

A hordó gyártásához $\mathbf{\frac{167}{0{,}88}\approx 190\ dm^2}$ lemezre van szükség. (1 pont)

b) (Minden hosszúságot dm-ben mérünk, r a henger sugara, m pedig a magassága.) A felül nyitott henger térfogata: $r^2\pi m=200$, felszíne: $r^2\pi+2r\pi m$.
(1 pont)

$m=\frac{200}{r^2\pi}$, ezzel a 200 literes henger felszíne $A(r)=\left(r^2\pi+2r\pi\cdot\frac{200}{r^2\pi}=\right)r^2\pi+\frac{400}{r}$
(2 pont)

Az $A(r)=r^2\pi+\frac{400}{r}$ (r > 0) függvény deriválható, és ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0. (1 pont)

$A'(r)=2r\pi-\frac{400}{r^2}$ (1 pont)

$2\pi r-\frac{400}{r^2}=0$, amiből $r=\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}(\approx 3{,}99)$. (2 pont)

Az A függvény második deriváltja mindenhol pozitív, tehát a $\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ ennek a függvénynek (abszolút) minimumhelye. (1 pont)

A legkisebb felszínű, felül nyitott forgáshenger sugara körülbelül 3,99 dm,
(1 pont)

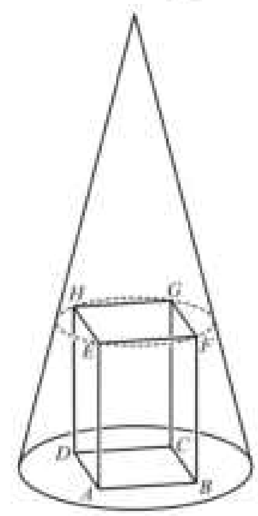
magassága $\mathbf{\frac{200}{r^2\pi}\approx 3{,}99\,dm}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

30) Az *ABCDEFGH* négyzetes oszlop *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élei merőlegesek az *ABCD* alaplapra. Az *A* csúcsból kiinduló három él hossza $AB=AD=8$ egység, $AE=15$ egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok skaláris szorzatát! (3 pont)

A négyzetes oszlop köré egy *P* csúcspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az *A*, *B*, *C*, *D* csúcsok a kúp alaplapjára, az *E*, *F*, *G*, *H* csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.



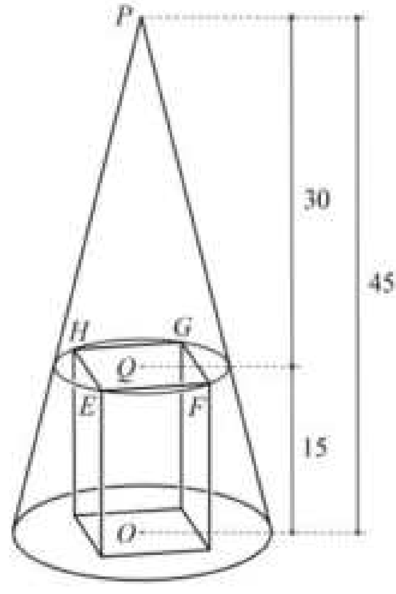
b) Számítsa ki a kúp felszínét! (7 pont)

c) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.) (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 25. feladat*

b) Jelölje O az $ABCD$ négyzetnek (és a kúp alaplapjának) a középpontját, Q az $EFGH$ négyzet középpontját. A kúpból az $EFGH$ sík egy kisebb kúpot metsz ki, amely az eredetihez (középpontosan) hasonló (a hasonlóság középpontja a P pont). $PQ = PO - OQ = 45 - 15 = 30$, így a hasonlóság aránya $\frac{PQ}{PO} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. (2 pont)



A kisebb kúp alapkörének sugara (az $EFGH$ négyzet köré írt kör sugara) $QE = \frac{\sqrt{2}\cdot 8}{2} = 4\sqrt{2}\,(\approx 5{,}66)$. A hasonlóság miatt a körülírt kúp alapkörének a sugara ennek az 1,5-szerese: $R = 6\sqrt{2}\,(\approx 8{,}49)$.(2 pont)

A körülírt kúp alkotója (az alapkör sugarából és a kúp magasságából Pitagorasz-tétellel) $a = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 45^2} = \sqrt{2097}\,(\approx 45{,}79)$. (2 pont)

A körülírt kúp felszíne $R^2\pi + R\pi a \approx \mathbf{1446{,}9}$ (területegység). (1 pont)

c) *Lásd: Síkgeometria 34. feladat*

Összesen: 16 pont

31) Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30° -os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

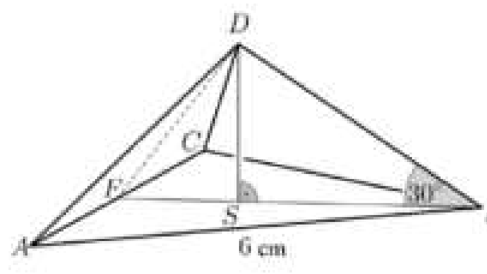
a) **Határozza meg a tetraéder térfogatát! (6 pont)**

A tetraéderrel 1-est, 2-est, 3-ast vagy 4-est lehet dobni (a dobás eredményének az alsó lapon lévő számot tekintjük). Az 1-es, a 2-es, illetve a 3-as dobásának valószínűsége egyenlő. A 4-es dobás valószínűsége ötször akkora, mint az 1-es dobásé.

b) **Ha a bűvész a két dobótetraédert egyszerre dobja fel, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 lesz? (5 pont)**

Megoldás:

a) Az ábra jelöléseit használjuk. A gúla ABC alaplapjának középpontja (súlypontja) S. DS merőleges az alaplapra, a feltétel szerint pedig $SBD\sphericalangle = 30°$.



nt)

BS az ABC szabályos háromszög magasságának (súlyvonalának) kétharmada:

$BS = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ cm. (2 pont)

A gúla testmagassága $DS = BS\cdot \mathrm{tg}30° = 2$ cm. (1 pont)

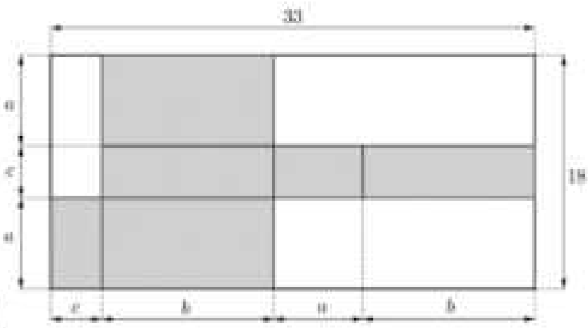
Az ABC háromszög területe: $T = \frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \approx 15{,}59\ \text{cm}^2$. (1 pont)

A gúla térfogata tehát: $V = \frac{T\cdot DS}{3} = \mathbf{6\sqrt{3} \approx (10{,}4)\,cm^3}$ (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 46. feladat*

Összesen: 11 pont

32) Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm! (3 pont)

b) Hogyan kell megválasztani az *a, b, c,* élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen? (9 pont)

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van, amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem? (4 pont)

Megoldás:

a) A szakaszok hosszát cm-ben mérve

$2a + c = 18$ miatt $c = 18 - 2 \cdot 7 = 4$. (1 pont)

$a + 2b + c = 33$ miatt $b = \dfrac{33 - 7 - 4}{2} = 11$. (1 pont)

A téglatest térfogata: $\boldsymbol{abc = 7 \cdot 11 \cdot 4 = 308\ \text{cm}^3}$. (1 pont)

b) A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.

A $\left.\begin{array}{r} 2a + c = 18 \\ a + 2b + c = 33 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer első egyenletéből

$c = 18 - 2a$. (1 pont)

$2b = 33 - a - c = 33 - a - (18 - 2a) = a + 15$, ezért $b = \dfrac{a}{2} + 7{,}5$. (1 pont)

$V = abc = a\left(\dfrac{a}{2} + 7{,}5\right)(18 - 2a)\ \ (0 < a < 9)$ (1 pont)

A $V(a) = a\left(\dfrac{a}{2} + 7{,}5\right)(18 - 2a);\ 0 < a < 9$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol

$V'(a) = 0$. (1 pont)

$V(a) = -a^3 - 6a^2 + 135a$ (1 pont)

$V'(a) = -3a^2 - 12a + 135 = -3\left(a^2 + 4a - 45\right)$ (1 pont)

$a^2 + 4a - 45 = 0$ gyökei 5 és -9, a -9 nem lehetséges, az 5 pedig megfelel. (1 pont)

$V''(a) = -6a - 12$ és így $V''(5) < 0$, tehát *V*-nek (abszolút) maximuma van $a = 5$ -nél. (1 pont)

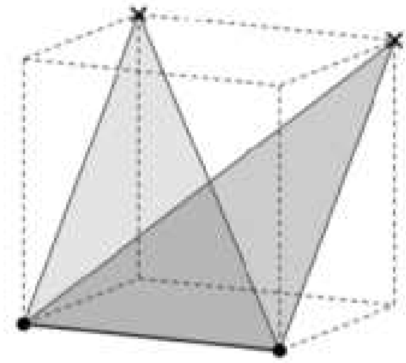
A téglatest térfogata maximális $(400\ \text{cm}^3)$, ha éleinek hossza $\boldsymbol{a = 5}$ **cm,** $\boldsymbol{b = 10}$ **cm és** $\boldsymbol{c = 8}$ **cm**. (1 pont)

c) A téglatest 8 csúcsa összesen $\binom{8}{3} = 56$ háromszöget határoz meg. (1 pont)

Ezek közül le kell vonni azokat, melyeknek síkja egybeesik a téglatest valamelyik lapjának síkjával. Mind a hat lapon négy ilyen háromszög van, összesen tehát 24. (2 pont)

A megfelelő háromszögek száma $\mathbf{(56 - 24 =)\,32}$. (1 pont)

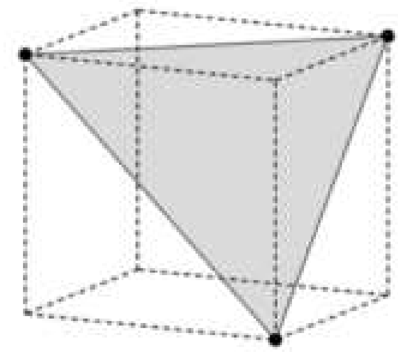
Alternatív megoldás:



A feladat szerint nem választható olyan háromszög, amelynek két oldala a téglatest két élével azonos.

Ha a háromszög egyik oldala a téglatest egy éle, akkor ennek a két végpontjához kétféleképpen választhatjuk a háromszög harmadik csúcsát, mert a kiválasztott élben csatlakozó két lap egyik csúcsa sem választható a háromszög harmadik csúcsaként. (1 pont)

A téglatestnek 12 éle van, ezért ilyen háromszögből összesen $12 \cdot 2 = 24$ darab van. (1 pont)



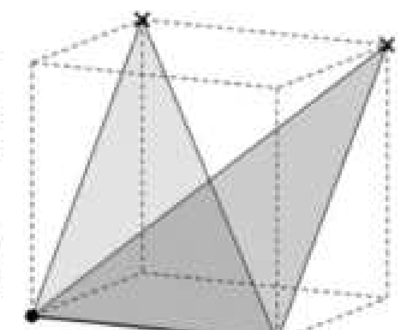
Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik élével azonos, akkor mindhárom oldala a téglatest egy-egy lapjának átlója.

A téglatest egy adott csúcsából kiinduló három él nem közös végpontjai egy háromszöget határoznak meg.

A téglatestnek 8 csúcsa van, ezért ilyen háromszögből 8 darab van. (1 pont)

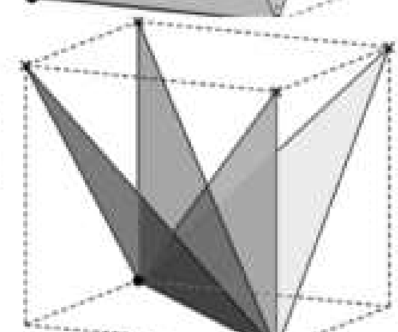
A megfelelő háromszögek száma $\mathbf{24 + 8 = 32}$. (1 pont)

Alternatív megoldás:



A téglatest „alsó” lapjáról két szomszédos csúcsot 4-féleképpen választhatunk, ezekhez a feltételnek megfelelően a „felső” lapjáról 2-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot. (1 pont)

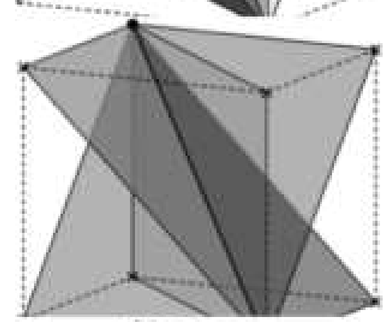
Az alsó lapról két átellenes csúcsot 2-féleképpen választhatunk, ezekhez a felső lapról 4-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot. (1 pont)



Tehát $(4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 =)16$ megfelelő háromszög van, melyeknek az alsó lapon van két csúcsa, és ugyanígy 16 megfelelő háromszög van, melyeknek a felső lapon van két csúcsa. (1 pont)

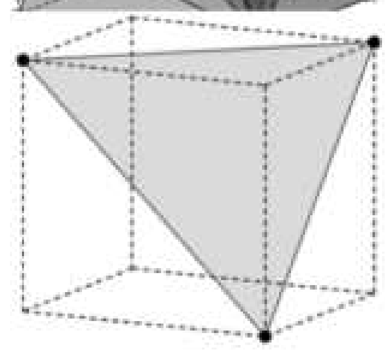
Összesen tehát **32** megfelelő háromszög van. (1 pont)

Alternatív megoldás:



A téglatest egy kiválasztott testátlójának két végpontjához a téglatest maradék 6 csúcsának bármelyike választható a háromszög harmadik csúcsának. (1 pont)

A téglatestnek 4 testátlója van, ezért ilyen háromszögből összesen $6 \cdot 4 = 24$ darab van. (1 pont)



Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik testátlója, akkor nem lehet olyan oldala sem, amelyik a téglatest valamelyik éle, ezért mindhárom oldala lapátló.

Ilyen háromszögből 8 darab van. (1 pont)

A megfelelő háromszögek száma $\mathbf{24 + 8 = 32}$.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

33) **Az *ABC* derékszögű háromszög *BC* befogójának hossza 18 cm, a *CA* befogójának hossza 6 cm.**

a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (3 pont)

A *BC* befogó egy *P* belső pontját összekötjük az *A* csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

b) Milyen hosszú a *PB* szakasz? (6 pont)

Állítsunk merőleges egyenest az *ABC* háromszög síkjára *C* pontban! A merőleges egyenes *D* pontjára teljesül, hogy *CD* hossza 15 cm.

c) Mekkora az *ABCD* tetraéder térfogata? (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Síkgeometria 2. feladat*

b) *Lásd: Síkgeometria 2. feladat*

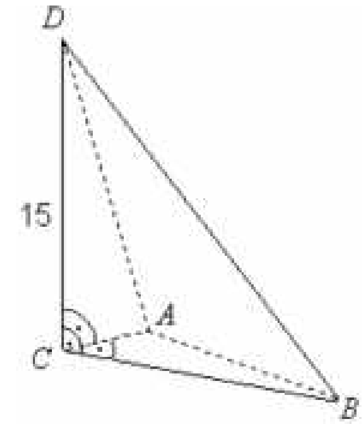
c) Tekintsük a tetraéder alapjának az *ABC* háromszöget, ekkor a testmagasság *CD* lesz: $m = 15$ cm (2 pont)

Az *ABC* háromszög területe $54\ \text{cm}^2$.

$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{54 \cdot 15}{3}$.

Így a keresett térfogat: **270 cm³**. (2 pont)

Összesen: 13 pont



34) **a) A *KLMN* derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges *LM* szár egyenese körül.**

Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!) (4 pont)

b) Az *ABCD* derékszögű érintőtrapéz *AB* és *CD* alapjai $(AB > CD)$ hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges *AD* szárral vett érintési pontja negyedeli az *AD* szárat.

Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát! (12 pont)

Megoldás:

a) A kapott alakzat egy csonkakúp, magassága *LM*, az alapkörök sugara *KL* és *MN*. (1 pont)

A csonkakúp térfogata: $V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right) \approx \mathbf{13326,47}$ térfogategység. (3 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 12. feladat*

Összesen: 16 pont

35) **Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.**

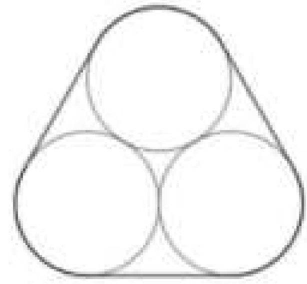
a) **András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a**

tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulás elhanyagolható.) **(4 pont)**

András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.

b) **Mutassa meg, hogy András állítása hamis!** **(3 pont)**

Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)



c) **A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.)** **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 32. feladat*

b) *Lásd: Számelmélet 14. feladat*

c) Az ábra köreinek érintkezése miatt az alapterület felbontható egy 40 mm oldalú szabályos háromszögre (ennek csúcsai a körök középpontjai), három egybevágó téglalapra, továbbá három egybevágó $120°$-os középponti szögű körcikkre (amelyek együtt egy teljes kört alkotnak). (2 pont)

Az alapterület tehát

$40^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 20 \cdot 40 + 20^2\pi \approx 4349\ \text{mm}^2$. (2 pont)

A doboz térfogata $4349 \cdot 40 = 173\,960\ \text{mm}^3$. (1 pont)

A három labda térfogata $4 \cdot 20^3 \cdot \pi \approx 100\,531\ \text{mm}^3$. (1 pont)

Ez a doboz térfogatának kb. **58%**-a. (1 pont)

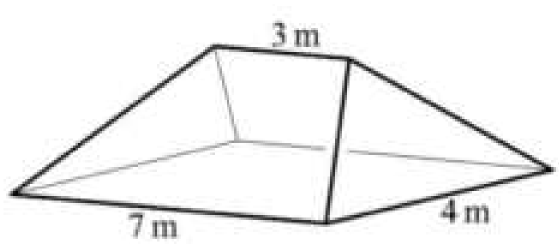
Összesen: 14 pont

36) Ádám balatoni telkén áll egy kis hétvégi ház. A ház felülnézete egy $7\ \text{m} \times 4\ \text{m}$-es téglalap. Ha esik az eső, akkor a tetőre lehulló csapadékot a tető négy oldalán körbefutó ereszcsatornák gyűjtik össze és vezetik be négy nagy, kezdetben üres (fedett) hordóba. A hordók forgáshenger alakúak, belső átmérőjük 40 cm, magasságuk 90 cm.

Egy nyári zivatar alkalmával 15 mm csapadék hullott a településen (ez azt jelenti, hogy minden vízszintes felületen 15 mm magasan állna az esővíz, ha nem szivárogna el.) A zivatar közben a tetőre lehullott csapadék 95%-a összegyűlt a hordókban.

a) **A zivatar után mindegyik hordóban ugyanolyan magasan állt a víz. Mekkora ez a magasság?** **(5 pont)**

A ház cseréptetteje elöregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok



egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.

b) Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserepezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz?

(11 pont)

Megoldás:

a) A tető alapterülete: $7 \cdot 4 = 28\ \text{m}^2$. (1 pont)

A tetőre hullott csapadék térfogata $28 \cdot 0{,}015 = 0{,}42\ \text{m}^3$, (1 pont)

a hordókban összegyült víz térfogata $0{,}42 \cdot 0{,}95 = 0{,}399\ \text{m}^3$, egy-egy hordóba tehát (jó közelítéssel) $V = 0{,}1\ \text{m}^3$ esővíz került. (1 pont)

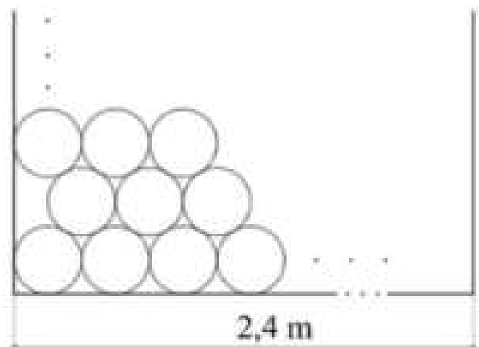
Egy hordó alapterülete $T = r^2\pi = 0{,}2^2 \cdot \pi \approx 0{,}126\ \text{m}^2$. (1 pont)

A V térfogatú esővíz $\dfrac{V}{T} = \dfrac{0{,}1}{0{,}126} \approx 0{,}79\ \text{m}$, azaz **79 cm** magasságig tölti meg az egyes hordókat (és ez valóban kisebb, mint a hordó magassága). (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 39. feladat*

Összesen: 16 pont

37) Egy teherautó raktere 2,4 méter széles, 2 méter magas és 7 méter hosszú. Ezzel a teherautóval kell olyan, méretre vágott farönköket szállítani, amelyek forgáshenger alakúak, 24 centiméter az átmérőjük, és 7 méter hosszúak. A rakomány biztonsági okokból nem nyúlhat túl a raktéren egyik irányban sem. A szállítócég az ábrán látható stratégiával rendezi el a farönköket.



a) Mutassa meg, hogy legfeljebb 86 farönköt lehet így a raktérben elhelyezni! **(8 pont)**

b) A raktérnek hány százaléka marad üresen, ha 86 farönköt szállítanak? **(4 pont)**

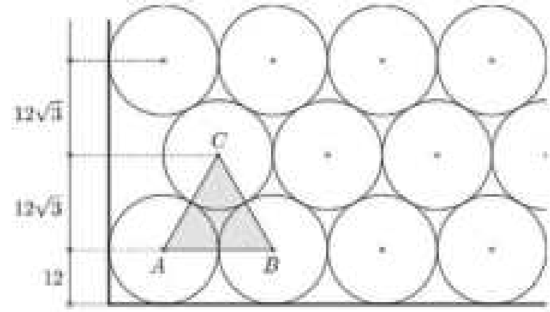
Kiderült, hogy a fák egy részében megtelepedtek a szúbogarak. Bármelyik fát kiválasztva 4% annak a valószínűsége, hogy van benne szú. Az egyik vásárló cég 50 fát vett.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy szúrágta fa kerül a rakományába? **(4 pont)**

Megoldás:

a) A farönköket szemléltető egybevágó, 24 cm átmérőjű körökből (alulról kezdve a számozást) a páratlan sorszámú sorokban 10, a párosokban pedig 9 kör fér el a 240 cm-en. (1 pont)

A körközéppontok egy 24 cm rácsponttávolságú szabályos háromszögrács egy részletét határozzák meg. Az ábra ABC szabályos háromszögének magassága $12\sqrt{3}\,(\approx 20{,}78)$ cm. (A körök középpontja ennyivel lesz magasabban minden következő sorban az előző sorban elhelyezkedő



körközéppontokhoz képest.) (2 pont)

Ha k db sort raktak a teherautóra, akkor a rakomány $(k-1)\cdot 12\sqrt{3}+2\cdot 12$ cm magasságig tölti meg a rakteret. (1 pont)

A rakomány nem nyúlhat túl a raktéren,
ezért $(k-1)\cdot 12\sqrt{3}+2\cdot 12\le 200$. (1 pont)

$k\le \dfrac{176}{12\sqrt{3}}+1\approx 9{,}47$ (1 pont)

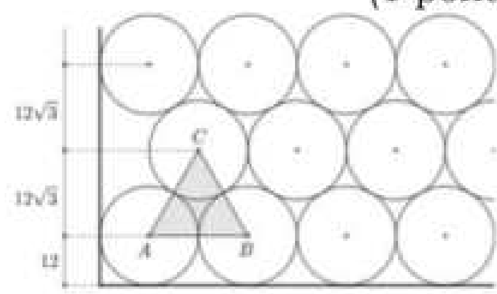
Legfeljebb 9 sorban rakhattak fákat a raktérbe. (1 pont)

5 sorban $5\cdot 10=50$ db, 4 sorban $4\cdot 9=36$ db farönk, összesen tehát legfeljebb $50+36=\mathbf{86}$ farönk lehet a raktérben. (1 pont)

Alternatív megoldás:

A farönköket szemléltető egybevágó, 24 cm átmérőjű körökből (alulról kezdve a számozást) a páratlan sorszámú sorokban 10, a párosokban pedig 9 kör fér el a 240 cm-en. (1 pont)

A körközéppontok egy 24 cm rácsponttávolságú szabályos háromszögrács egy részletét határozzák meg. Az ábra ABC szabályos háromszögének magassága $12\sqrt{3}\,(\approx 20{,}78)$ cm. (A körök középpontja ennyivel lesz magasabban minden következő sorban az előző sorban elhelyezkedő körközéppontokhoz képest.) (2 pont)



9 sor magassága $8\cdot 12\sqrt{3}+2\cdot 12\approx 190{,}3$ cm, tehát 9 sor még belefér a raktérbe. (2 pont)

10 sor magassága $9\cdot 12\sqrt{3}+2\cdot 12\approx 211{,}1$ cm, tehát 10 sor már nem fér be a raktérbe. (2 pont)

Tehát, legfeljebb **86** farönk lehet a raktérben. (1 pont)

b) A raktér térfogata: $V_n=2{,}4\cdot 2\cdot 7=33{,}6\text{m}^3$. (1 pont)

A 86 darab fa térfogata: $V_{fa}=0{,}12^2\cdot\pi\cdot 7\cdot 86\approx 27{,}2\text{m}^3$. (1 pont)

$\dfrac{V_{fa}}{V_n}\approx\dfrac{27{,}2}{33{,}6}\approx 0{,}81$ (azaz 81%) (1 pont)

Tehát a raktér térfogatának **19%**-a lesz üres. (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 61. feladat*

Összesen: 16 pont

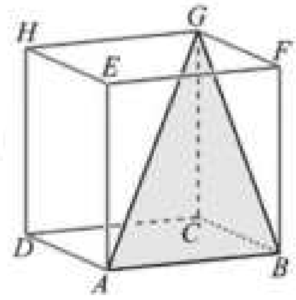
38) Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska” csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek!

(6 pont)

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete? (Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.) **(4 pont)**

Az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 10 egység.



c) Számítsa ki az *ABG* háromszög beírt körének sugarát! **(6 pont)**

Megoldás:

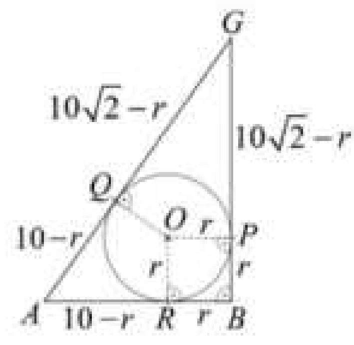
a) *Lásd: Bizonyítások 34. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 62. feladat*

c) Az ABG háromszögben $BG = 10\sqrt{2}$,
és (például a térbeli Pitagorasz-tétellel)
$AG = \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}$. (1 pont)
$AB^2 + BG^2 = AG^2$, így (mert AB merőleges a $BCGF$ síkra, és így merőleges annak bármely egyenesére) $ABG\sphericalangle = 90^\circ$. (1 pont)
(A beírt kör sugarát az $r = \frac{t}{s}$ képletből számítjuk ki.)
Az ABG háromszög területe $t = \frac{AB \cdot BG}{2} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$. (2 pont)
A háromszög kerülete $10 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$, innen a félkerület hossza $s = 5 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ (1 pont)
A beírt kör sugara $r = \frac{50\sqrt{2}}{5 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}} \approx 3{,}41$ egység. (1 pont)

Alternatív megoldás:

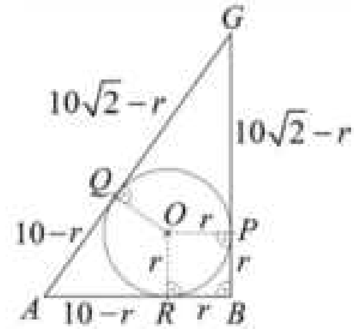
Az ABG háromszögben $BG = 10\sqrt{2}$,
és (például a térbeli Pitagorasz-tétellel)
$AG = \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}$. (1 pont)
$AB^2 + BG^2 = AG^2$, így (mert AB merőleges a $BCGF$ síkra, és így merőleges annak bármely egyenesére) $ABG\sphericalangle = 90^\circ$. (1 pont



Az ABG derékszögű háromszög beírt körének középpontját jelölje O, sugarát r, a kör az oldalakat érintse rendre a P, Q, R pontokban az ábra szerint. Egy körhöz adott külső pontból húzott két érintőszakasz hossza megegyezik, továbbá az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. Így $PORB$ egy r oldalú négyzet, $AR = AQ = 10 - r$, $GP = GQ = 10\sqrt{2} - r$. (2 pont)
Az AG átfogó a két érintőszakasz összege, tehát. (1 pont)
ebből **a beírt kör sugara:**
$\boldsymbol{r = \frac{10 + 10\sqrt{2} - 10\sqrt{3}}{2}\left(= 5\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right) \approx 3{,}41}$ **egység.** (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az ABG háromszögben $BG = 10\sqrt{2}$, (1 pont)



$AB^2 + BG^2 = AG^2$, így (mert AB merőleges a $BCGF$ síkra, és így merőleges annak bármely egyenesére) $ABG\sphericalangle = 90^\circ$. (1 pont)

Az ábra szerint az ABG derékszögű háromszög beírt körének középpontja O, sugara r, és a kör az AB befogót az R pontban érinti. Legyen továbbá $BAG\sphericalangle = \alpha$,

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$, innen $\alpha = 54{,}7^\circ$.

Mivel a beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja, ezért $BAO\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$ és $OBA\sphericalangle = 45^\circ$. (2 pont)

Az ARO derékszögű háromszögből $AR = r \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, másrészt $RB = r$ miatt

$AR + RB = r \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + r = 10$. (1 pont)

A beírt kör sugara $\boldsymbol{r = \dfrac{10}{\mathrm{ctg}27{,}35^\circ + 1} \approx 3{,}41}$ **egység.** (1 pont)

Összesen: 16 pont